



CONCURSUL NAȚIONAL „PEDAGOGIA MATEMATICII”
7 martie 2026
ETAPA JUDEȚEANĂ/SECTOARELOR MUNICIPIULUI BUCUREȘTI
CLASA a X-a
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- *Filiera vocațională, profilul pedagogic, toate specializările*
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (autor Cristina Mihaela Iacob)

(20 de puncte)

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale următoarele ecuații:		
a)	$\sqrt{\log_{2026}^4 x - 2 \cdot \log_{2026}^2 x + 1} = 0.$	
b)	$\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4.$	
a)	Condiția de existență a logaritmului $x > 0$. Notăm $\log_{2026}^2 x = t, t \geq 0$ Obținem $\sqrt{t^2 - 2t + 1} = 0 \Rightarrow \sqrt{(t-1)^2} = 0$ $t = 1$, deci $\log_{2026}^2 x = 1 \Rightarrow \log_{2026} x = \pm 1$ $x = 2026^{-1} = \frac{1}{2026}$ care nu convine $x = 2026$ care convine	2p 2p 2p 2p 2p
b)	$x + 11 \geq 0, x + \sqrt{x + 11} \geq 0, x - \sqrt{x + 11} \geq 0$ Ridicând la pătrat obținem $x + \sqrt{x^2 - x - 11} = 8$ Deci $x^2 - x - 11 = 64 - 16x + x^2$ $x = 5$ care convine	3p 3p 2p 2p

SUBIECTUL II (autor Cristina Mihaela Iacob)

(20 de puncte)

a)	Calculați valoarea expresiei $E(a, b) = \frac{\frac{3}{a^2} - \frac{3}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} : \frac{a + \sqrt{ab} + b}{a - b} + 2\sqrt{ab}$ pentru $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
b)	Arătați că $L \in \mathbb{N}$, unde $L = \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \dots + \log_2 2026} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \dots + \log_3 2026} + \dots$ $+ \frac{1}{\log_{2026} 1 + \log_{2026} 2 + \dots + \log_{2026} 2026}$

a)	$a, b \geq 0; E(a, b) = \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{a + \sqrt{ab} + b}{a - b} + 2\sqrt{ab} =$ $= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a^2} + \sqrt{ab} + \sqrt{b^2})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - b}{a + \sqrt{ab} + b} + 2\sqrt{ab} =$ $= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 2\sqrt{ab} =$ $= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} = a + b$ $E(\sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$	2p 2p 2p 2p 2p
b)	$L = \frac{1}{\log_2(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2026)} + \frac{1}{\log_3(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2026)} + \dots + \frac{1}{\log_{2026}(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2026)} =$ $= \log_{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2026)} 2 + \log_{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2026)} 3 + \dots + \log_{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2026)} 2026 =$ $= \log_{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2026)} (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2026) = 1, \text{ deci } L \in \mathbb{N}$	4p 4p 2p

SUBIECTUL III (autor Anamaria Șendroi)

(25 de puncte)

Se consideră funcția $f : (-8, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt[3]{x}}$. a) Dați un exemplu de număr real $a > -8$ astfel încât $f(a) \in \mathbb{Q}$. Arătați că există o infinitate de valori reale ale lui a, astfel încât $f(a)$ să fie număr rațional. b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} = \frac{x + 2}{\sqrt{4 - 2\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2}}$. c) Calculați pătratul sumei $S = \frac{1}{f(0^3) + f(1^3)} + \frac{1}{f(1^3) + f(2^3)} + \frac{1}{f(2^3) + f(3^3)} + \dots + \frac{1}{f(15^3) + f(16^3)}.$		
a)	De exemplu, pentru $a = -1, f(-1) = 1 \in \mathbb{Q}$ Fie $\sqrt{2 + \sqrt[3]{a}} = r$, $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 0$. Deci a poate fi orice număr real de forma $(r^2 - 2)^3$, cu $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 0$.	5p 5p
b)	$\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2} = x + 2, \text{ cu condiția } 2 + \sqrt[3]{x} \geq 0, x + 2 \geq 0$ $\sqrt{8 + x} = x + 2$ $8 + x = (x + 2)^2$ $x^2 + 3x - 4 = 0$ $x = -4, \text{ care nu convine sau } x = 1, \text{ care convine}$	4p 2p 1p 1p 2p
c)	$S = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{17} + \sqrt{18}} =$ $= \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{18} - \sqrt{17} =$ $= 2\sqrt{2}$ $S^2 = 8$	2p 1p 1p 1p



SUBIECTUL IV (autor Maria Elena Panaitopol)

(25 de puncte)

Fie numerele reale a, b, c, u, v, w cu proprietatea $a^2 + b^2 + c^2 = au + bv + cw = u^2 + v^2 + w^2$.		
a) Calculați $(a-u)^2 + (b-v)^2 + (c-w)^2$.		
b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\sqrt{x+y} + 2\sqrt{8-x} + \sqrt{6-y} = 14$.		
a)	$(a-u)^2 + (b-v)^2 + (c-w)^2 = a^2 - 2au + u^2 + b^2 - 2bv + v^2 + c^2 - 2cw + w^2 =$ $= (a^2 + b^2 + c^2) - 2(au + bv + cw) + (u^2 + v^2 + w^2) = 0$	5p 5p
b)	Observăm că, înlocuind $a = \sqrt{x+y}$, $b = \sqrt{8-x}$, $c = \sqrt{6-y}$, $u = 3$, $v = 2$, $w = 1$, sunt verificate toate condițiile din ipoteza problemei Atunci, conform a), $(\sqrt{x+y} - 3)^2 + (\sqrt{8-x} - 2)^2 + (\sqrt{6-y} - 1)^2 = 0$ Obținem $x = 4$ și $y = 5$, care convin	5p 5p 5p