



VII. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIV. EMMV

megyei szakasz, 2025. február 1.

X. osztály

1. feladat. a) Igazold, hogy ha az $az^2 + bz + c = 0$ egyenlet $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ együtthatóira fennál a $|b| \geq 2|c|$ egyenlőtlenség, akkor az egyenletnek létezik legalább egy olyan gyöke, amelynek a modulusa kisebb vagy egyenlő mint 1!

b) Határozd meg a $z \in \mathbb{C}$ lehetséges értékeit úgy, hogy teljesüljön a

$$\max\{|z - 1|, |z - \varepsilon|, |z - \varepsilon^2|\} \leq 1$$

egyenlőtlenség, ha $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ harmadrendű egységgyökök!

2. feladat. Adottak az $1 < a < b$ valós számok.

a) Igazold, hogy $(a + b)x - ab \geq x^2$, minden $x \in [a, b]$ esetén.

b) Adottak az $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ valós számok, ahol $n \geq 2$. Igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{x_1}((a + b)x_2 - ab) + \log_{x_2}((a + b)x_3 - ab) + \dots + \log_{x_{n-1}}((a + b)x_n - ab) + \log_{x_n}((a + b)x_1 - ab) \geq 2n.$$

3. feladat. Tanulmányozd az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény injektivitását, amely teljesíti a

$$2f(x)^2 + 5f(x) + 2 = f(2x^2 - 10x + 5)$$

összefüggést minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

4. feladat. Bizonyítsd be, hogy 10 különböző rácspont közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy az általuk meghatározott szakasz harmadolópontjai is rácspontok legyenek! (Rácspontnak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.)