

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIV. EMMV

megyei szakasz, 2025. február 1.

IX. osztály

1. feladat (10 pont). Ha x, y, z, t szigorúan pozitív valós számok, akkor igazold az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zt} + \sqrt{tx} \leq x + y + z + t,$

b) $\frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right),$

c) $\frac{1}{x+y+\sqrt{zt}} + \frac{1}{y+z+\sqrt{tx}} + \frac{1}{z+t+\sqrt{xy}} + \frac{1}{t+x+\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right).$

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) A mértani és számtani középáránysok közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt{zt} \leq \frac{z+t}{2} \quad \text{és} \quad \sqrt{tx} \leq \frac{t+x}{2}.$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket kapjuk, hogy

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zt} + \sqrt{tx} \leq x + y + z + t. \quad (3 \text{ pont})$$

b) Az $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ pozitív számokra alkalmazzuk a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \frac{3}{x+y+z},$$

ezt végigszorozva 3-mal következik, hogy $\frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$

(3 pont)

c) A b) alpont alapján

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{x+y+\sqrt{zt}} + \frac{1}{y+z+\sqrt{tx}} + \frac{1}{z+t+\sqrt{xy}} + \frac{1}{t+x+\sqrt{yz}} \\ &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{tx}} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{\sqrt{tx}} \right). \end{aligned}$$

Az a) alpont szerint

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{\sqrt{tx}} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}.$$

A fentiek alapján az következik, hogy

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} + \frac{3}{t} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right). \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

■

2. feladat (10 pont). Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1$, akkor igazold, hogy $\left\lceil \sqrt{[x] \cdot \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor} + 1 + \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$, ahol $[a]$ az $a \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli.

Matlap 10/2024, L:3802
Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

Legyen $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = k$. Mivel $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1$, ezért $k \in \mathbb{N}^*$. Ekkor

$$\begin{aligned} k &\leq x + \frac{1}{2} < k + 1 \\ k - \frac{1}{2} &\leq x < k + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(1 pont)

Ha $x \in \left[k - \frac{1}{2}, k \right)$, akkor $[x] = k - 1$, így

$$\begin{aligned} \left\lceil \sqrt{[x] \cdot \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor} + 1 + \frac{1}{2} \right\rceil &= \left\lceil \sqrt{k(k-1) + 1} + \frac{1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \sqrt{k^2 - k + 1} + \frac{1}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

(2 pont)

Igazoljuk, hogy $k \leq \sqrt{k^2 - k + 1} + \frac{1}{2} < k + 1$. Mivel $k \in \mathbb{N}^*$, az egyenlőtlenség egyenértékű az alábbiakkal:

$$\begin{aligned} k - \frac{1}{2} &\leq \sqrt{k^2 - k + 1} < k + \frac{1}{2} \\ k^2 - k + \frac{1}{4} &\leq k^2 - k + 1 < k^2 + k + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség bal oldala nyilvánvalóan igaz, a jobb oldal pedig egyenértékű azzal, hogy $k > \frac{3}{8}$, ami szintén igaz.

Tehát $\left\lceil \sqrt{[x] \cdot \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor} + 1 + \frac{1}{2} \right\rceil = k$.

(2 pont)

Ha $x \in \left[k, k + \frac{1}{2} \right)$, akkor $[x] = k$, így

$$\left\lceil \sqrt{[x] \cdot \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor} + 1 + \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{k^2 + 1} + \frac{1}{2} \right\rceil. \quad (2 \text{ pont})$$

Igazoljuk, hogy $k \leq \sqrt{k^2 + 1} + \frac{1}{2} < k + 1$. Mivel $k \in \mathbb{N}^*$, az egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy:

$$k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{k^2 + 1} < k + \frac{1}{2}$$

$$k^2 - k + \frac{1}{4} \leq k^2 + 1 < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

ami igaz, tehát $\left\lfloor \sqrt{\left\lfloor x \right\rfloor \cdot \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 + \frac{1}{2}} \right\rfloor = k$. (2 pont)

■

3. feladat (10 pont). Az $1, 2, 3, \dots, 2025$ számok közül kiválasztunk 1014 számot úgy, hogy a legnagyobb kiválasztott szám páratlan legyen. Igazold, hogy bármilyen választás esetén a kiválasztott számok között van kettő, amelyeknek az összege a legnagyobb kiválasztott számmal egyenlő!

Spier Tünde, Arad

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Legyen a legnagyobb kiválasztott szám $2p + 1$, ahol $p \in \mathbb{N}$. A $2p + 1$ -nél kisebb számokat olyan párokba rendezzük, amelyekben az összeg $2p + 1$, azaz: $(1, 2p)$, $(2, 2p - 1)$, $\dots$, $(p, p + 1)$. (2 pont)

Ez p darab párt jelent, és a $2p + 1$ -nél kisebb számok mindegyike pontosan egy ilyen párban szerepel.

(1 pont)

Mivel $2p + 1 \leq 2025$, ezért $p \leq 1012$, következik, hogy $p + 2 \leq 1014$.

(1 pont)

Tehát legalább $p + 2$ számot választottunk az $1, 2, \dots, 2p, 2p + 1$ számok közül.

(1 pont)

Mivel ezek közül az egyik a $2p + 1$, ez azt jelenti, hogy legalább $p + 1$ számot választottunk az $1, 2, \dots, 2p$ számok közül.

(1 pont)

Mivel az $1, 2, \dots, 2p$ számokat p párba rendeztük el és legalább $p + 1$ számot választottunk közülük, a skatulyaelv alapján van olyan pár, amelynek mindkét tagját kiválasztottuk.

(3 pont)

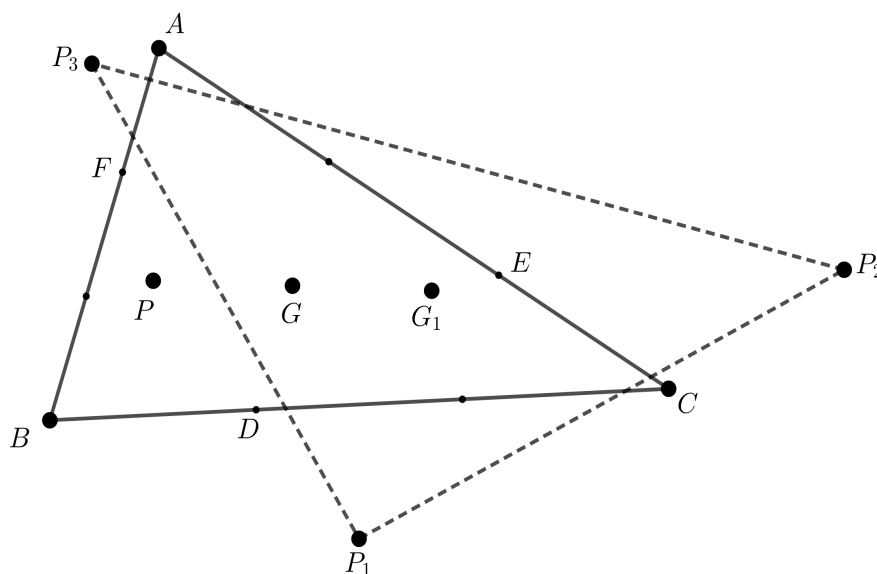
■

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög síkjában P egy tetszőleges pont. A D, E és F azok a pontok, amelyekre $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{AF}$. A P pontnak a D, E és F pontok szerinti szimmetrikusát jelölje rendre P_1, P_2 és P_3 . Ha G az ABC háromszög súlypontja és G_1 a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy G a PG_1 szakasz felezőpontja!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



Mivel G_1 a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja, ezért

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG_1} &= \frac{\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3}}{3} \\ &= \frac{2(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF})}{3}.\end{aligned}\quad (3 \text{ pont})$$

Továbbá $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$, így

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} &= \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \cdot \overrightarrow{PB} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} \cdot \overrightarrow{PC} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}.\end{aligned}$$

Hasonlóan $\overrightarrow{PE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$, valamint $\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$.
Tehát (3 pont)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG_1} &= \frac{2(\frac{2}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}}{3} \\ &= \frac{2(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})}{3} = 2 \cdot \overrightarrow{PG},\end{aligned}$$

ez pedig azt jelenti, hogy G a PG_1 szakasz felezőpontja. (3 pont)

■

Megjegyzés. Egy szemléletes ábra elkészítésére az első háromból egy pont jár.