

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIV. EMMV

megyei szakasz, 2025. február 1.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). A hét törpe kártyajátékot játszik egy különleges 2025 kártyából álló paklival. A kártyákon egy 1 és 2025 közötti természetes szám szerepel a gyök alatt. Mindegyik kártyán pontosan egy szám van és egyetlen szám sem szerepel két kártyán. A megkevert pakliból a törpék egymás után húznak egy-egy kártyát, amíg a pakli el nem fogy.

Bizonyítsd, hogy amikor az összes kártyát kihúzták lesz legalább egy törpe, akinek a kártyáin egyetlen természetes szám négyzete sem szerepel!

Gergely Anna, Székelyudvarhely

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

A kártyákon tehát szerepelnek a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{2025}$ számok, valamilyen sorrendben. Ahhoz, hogy egy kártyán természetes szám szerepeljen, a kártyán lévő érték $\sqrt{k^2}$ alakú kell legyen, ahol $k \in \mathbb{N}$.

(2 pont)

Észrevehetjük, hogy $2025 = 45^2$.

(1 pont)

Így a kártyákon szereplő természetes számok az

$$1 = \sqrt{1}, \quad 2 = \sqrt{4}, \quad 3 = \sqrt{9}, \quad \dots, \quad 45 = \sqrt{2025}. \quad (2 \text{ pont})$$

Viszont ezek között csak az $1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, \dots, 36 = 6^2$ számok négyzetszámok. (2 pont)

Mivel 7 törpe játszik, és összesen 6 darab négyzetszám szerepel a kártyákon, így a skatulya-elv alapján biztosan lesz legalább egy olyan törpe, akinek kártyáin nem szerepel egy természetes szám négyzete sem. (2 pont)



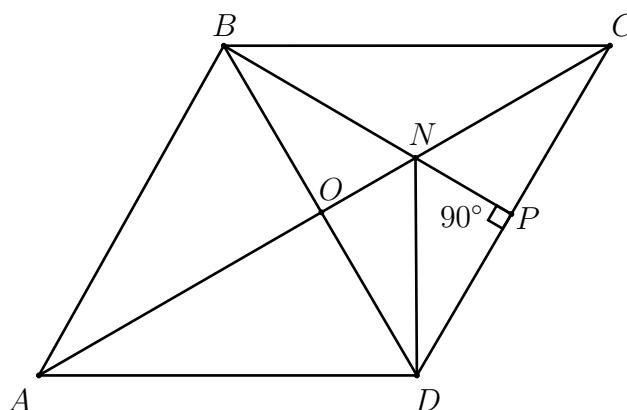
2. feladat (10 pont). Az $ABCD$ paralelogrammában $AD \equiv BD$, P a DC oldal egy olyan pontja, hogy $BP \perp DC$, továbbá $BP \cap AC = \{N\}$.

a) Bizonyítsd, hogy $NC \equiv ND$ és $AN = 2 \cdot ND$.

b) Bizonyítsd, hogy $\widehat{CAD} = 30^\circ$ akkor és csakis akkor, ha $ABCD$ rombusz!

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



3. feladat (10 pont). a) Határozd meg azon $x \geq 0$ racionális számokat, amelyekre $\frac{10x+1}{x+1}$ négyzetszám!

b) Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \cdots + \frac{x+2024}{2028} = \frac{2024^2}{2023} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2023 \cdot 2024} \right).$$

Matlap 10/A: 5017, 2024

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Mivel $x \geq 0$, ezért $1 \leq 10x+1 < 10x+10$, ahonnan következik, hogy

$$1 = \frac{x+1}{x+1} \leq \frac{10x+1}{x+1} < \frac{10x+10}{x+1} = 10.$$

Ha $\frac{10x+1}{x+1}$ az n természetes szám négyzete, vagyis $\frac{10x+1}{x+1} = n^2$, akkor $1 \leq n^2 < 10$, ahonnan kapjuk, hogy n^2 csak 1, 4 vagy 9 lehet. (2 pont)

Kipróbáljuk ezeket az eseteket.

- Ha $n^2 = 1$, akkor

$$\frac{10x+1}{x+1} = 1 \iff 10x+1 = x+1 \iff 9x = 0 \iff x = 0.$$

- Ha $n^2 = 4$, akkor

$$\frac{10x+1}{x+1} = 4 \iff 10x+1 = 4x+4 \iff 6x = 3 \iff x = \frac{1}{2}.$$

- Ha $n^2 = 9$, akkor

$$\frac{10x+1}{x+1} = 9 \iff 10x+1 = 9x+9 \iff x = 8.$$

Összegezve $x \in \{0, \frac{1}{2}, 8\}$.

(2 pont)

b) Minden k pozitív természetes szám esetén

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k \cdot (k+1)} = \frac{k+1}{k \cdot (k+1)} - \frac{k}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ezt felhasználva az egyenlet jobb oldalán álló zárójel átírható a következőképpen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2023 \cdot 2024} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2023 \cdot 2024} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \right) \\ &= \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \cdots \\ &\quad \cdots + \left(-\frac{1}{2023} + \frac{1}{2023} \right) - \frac{1}{2024} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2024} \\ &= \frac{2023}{2024}. \end{aligned}$$

(2 pont)

Ekkor az egyenlet a következő egyenértékű formákba írható át:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \dots + \frac{x+2024}{2028} &= \frac{2024^2}{2023} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2023 \cdot 2024} \right), \\ \frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \dots + \frac{x+2024}{2028} &= \frac{2024^2}{2023} \cdot \frac{2023}{2024}, \\ \frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \dots + \frac{x+2024}{2028} &= 2024.\end{aligned}\quad (1 \text{ pont})$$

Átrendezve a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \dots + \frac{x+2024}{2028} - 2024 &= 0, \\ \left(\frac{x+1}{5} - 1 \right) + \left(\frac{x+2}{6} - 1 \right) + \left(\frac{x+3}{7} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{x+2024}{2028} - 1 \right) &= 0, \\ \frac{x-4}{5} + \frac{x-4}{6} + \frac{x-4}{7} + \dots + \frac{x-4}{2028} &= 0, \\ (x-4) \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2028} \right) &= 0.\end{aligned}\quad (1 \text{ pont})$$

Viszont ebben az egyenletben az $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2028} \neq 0$, ezért $x-4=0$, azaz $x=4 \in \mathbb{Q}$. (1 pont)

Megjegyzés. Az $\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \dots + \frac{x+2024}{2028} = 2024$ egyenlet úgy is megoldható, hogy kitaláljuk és behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy $x=4$ megoldás, illetve felhasználjuk, hogy az elsőfokú ($ax=b$ alakú) egyenletnek egyetlen megoldása van, ha $a \neq 0$.

■

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben O a BC oldal felezőpontja, E és F pedig az AB és AC oldalaknak olyan belső pontjai, amelyekre $AE = 3 \cdot EB$ és $CF = 3 \cdot AF$. Az E és F pontokon keresztül az AO egyenessel húzott párhuzamosok a BC oldalt az M , illetve N pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy:

a) $EMNF$ trapéz és $EM + FN = AO$;

b) $\frac{T_{EMNF}}{T_{ABC}} = \frac{1}{2}$.

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) A feltevés alapján $EM \parallel AO$ és $FN \parallel AO$, tehát $EM \parallel FN$. (1 pont)

Ígazoljuk, hogy $EF \nparallel BC$. Legyen K és S az AB , illetve AC oldalak felezőpontjai. Illetve H az SC felezőpontja. A KS az ABC háromszög középvonala, így $KS \parallel BC$. Innen következik, hogy $KSCB$ trapéz, illetve EH a középvonala, tehát $EH \parallel BC$. Mivel egy ponton át egy egyenessel csak egy párhuzamos húzható, ezért ha $EF \parallel BC$, akkor $F = H$, ami ellentmond annak, hogy $CF = \frac{3}{4}AC$ és $CH = \frac{1}{4}AC$. Tehát $EF \nparallel BC$, így $EMNF$ trapéz. (1 pont)

Legyenek L és T a BO és OC szakaszok felezőpontjai. Így KL és ST az AOB és AOC háromszögek középvonalai, tehát

$$KL = \frac{1}{2}AO \quad \text{és} \quad ST = \frac{1}{2}AO.$$

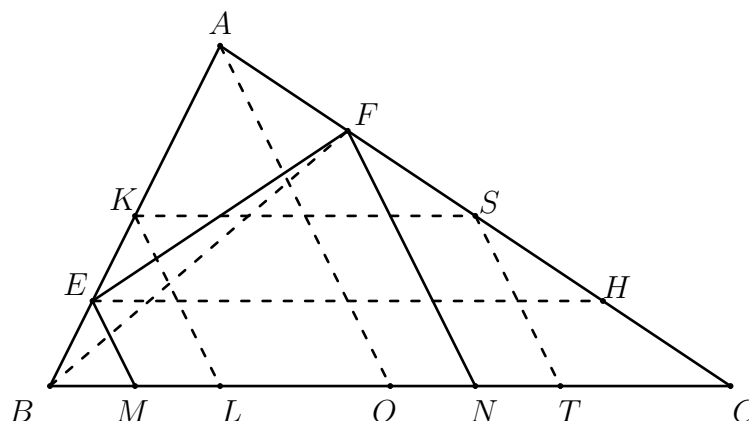
Az EM a BKL háromszög középvonala, vagyis

$$EM = \frac{KL}{2} = \frac{1}{4}AO. \quad (1 \text{ pont})$$

Az FN a $AOTS$ trapéz középvonala, vagyis

$$FN = \frac{AO + ST}{2}. \quad (1 \text{ pont})$$

Mivel $ST = \frac{AO}{2}$, így $FN = \frac{AO + \frac{AO}{2}}{2} = \frac{3}{4}AO$, ahonnan pedig $EM + FN = AO$. (1 pont)



b) Mivel O a BC felezőpontja, ezért $T_{ABO\Delta} = \frac{1}{2}T_{ABC\Delta}$. Továbbá KL középvonal az ABO háromszögben, így $T_{BKL\Delta} = \frac{1}{4}T_{ABO\Delta}$, illetve EM középvonal az BKL háromszögben, így $T_{BEM\Delta} = \frac{1}{4}T_{BKL\Delta}$. Összegezve, azt kaptuk, hogy

$$T_{BEM\Delta} = \frac{1}{4}T_{BKL\Delta} = \frac{1}{16}T_{ABO\Delta} = \frac{1}{32}T_{ABC\Delta}. \quad (1 \text{ pont})$$

Legyen AQ az ABC háromszög A csúcsából húzott magasság ($Q \in BC$ és $AQ \perp BC$). Ha P a BC oldalon egy olyan pont, hogy $BP = k \cdot BC$, akkor

$$T_{ABP\Delta} = \frac{BP \cdot AQ}{2} = \frac{k \cdot BC \cdot AQ}{2} = k \cdot \frac{BC \cdot AQ}{2} = k \cdot T_{ABC\Delta}. \quad (1 \text{ pont})$$

A $CF = 3 \cdot AF$ feltételből kapjuk, hogy $AF = \frac{1}{4}AC$ és $CF = \frac{3}{4}AC$. A fenti területek közti összefüggést alkalmazva az ABC háromszögre és az $F \in AC$ osztópontra kapjuk, hogy

$$T_{ABF\Delta} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC\Delta}, \quad \text{illetve} \quad T_{FBC\Delta} = \frac{3}{4} \cdot T_{ABC\Delta}.$$

Majd újra alkalmazva az ABF háromszögre és az $E \in AB$ osztópontra ($AE = \frac{3}{4}AB$ a megadott feltételek miatt) kapjuk, hogy

$$T_{AEF\Delta} = \frac{3}{4}T_{ABF\Delta} = \frac{3}{16}T_{ABC\Delta}. \quad (1 \text{ pont})$$

Az FN az $ASTO$ trapéz középvonala és F az AS oldal felezőpontja, így N az OT oldal felezőpontja. Innen kapjuk, hogy

$$NC = NT + TC = \frac{1}{2}OT + TC = \frac{3}{2}TC = \frac{3}{4}OC = \frac{3}{8}BC.$$

A fenti területek közötti összefüggést alkalmazva a BFC háromszögben az $N \in BC$ osztópontra kapjuk, hogy

$$T_{FNC_{\Delta}} = \frac{3}{8}T_{FBC_{\Delta}} = \frac{9}{32}T_{ABC_{\Delta}}.$$

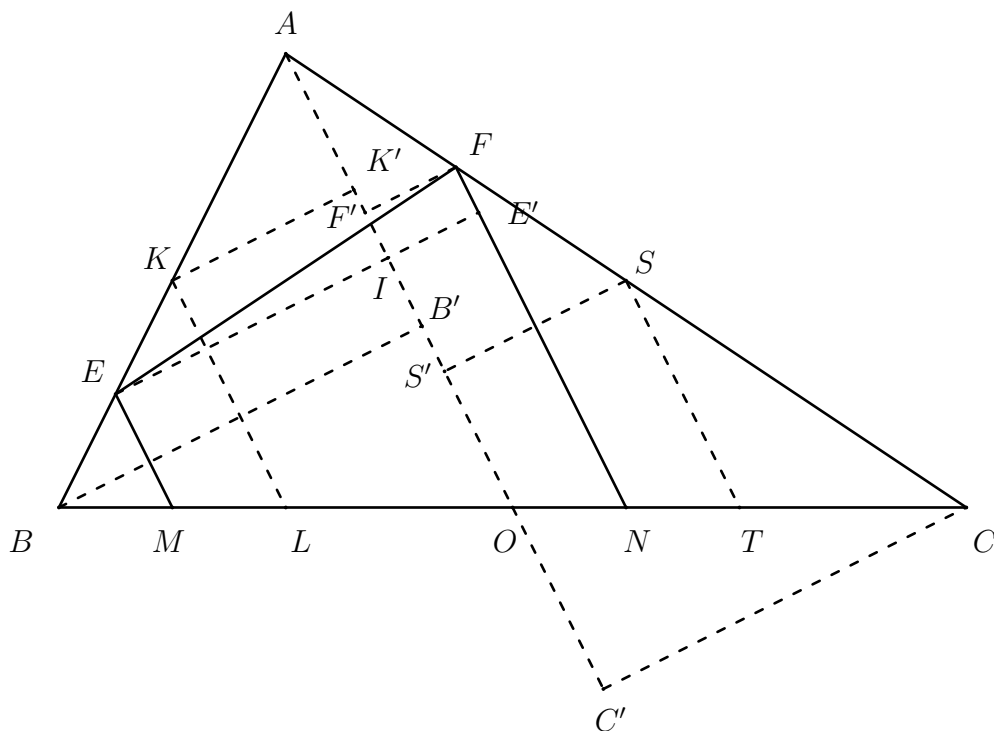
Végül

$$\begin{aligned} T_{EFNM} &= T_{ABC_{\Delta}} - T_{AEF_{\Delta}} - T_{BEM_{\Delta}} - T_{FNC_{\Delta}} \\ &= T_{ABC_{\Delta}} - \frac{3}{16}T_{ABC_{\Delta}} - \frac{1}{32}T_{ABC_{\Delta}} - \frac{9}{32}T_{ABC_{\Delta}} \\ &= \left(1 - \frac{6}{32} - \frac{1}{32} - \frac{9}{32}\right)T_{ABC_{\Delta}} \\ &= \frac{1}{2}T_{ABC_{\Delta}}. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

■

Második megoldás. Hivatalból

(1 pont)



a) A feltevés alapján $EM \parallel AO$ és $FN \parallel AO$, tehát $EM \parallel FN$. (1 pont)

Igazoljuk, hogy $EF \parallel BC$. Legyenek K és S az AB és AC oldalak felezőpontjai. Akkor $KS \parallel BC$, de KS és EF átlók az $EKFS$ négyszögben, tehát metszik egymást, vagyis $EF \parallel BC$. Tehát $EMNF$ trapéz. (1 pont)

Legyenek L és T a BO és OC szakaszok felezőpontjai. Így KL és ST az AOB és AOC háromszögek középvonalai.

Az EM a BKL_{Δ} középvonala, vagyis $EM = \frac{KL}{2} = \frac{1}{4}AO$. (1 pont)

Az FN az $AOTS$ trapéz középvonala, vagyis $FN = \frac{AO + ST}{2}$. (1 pont)

Mivel $ST = \frac{AO}{2}$, így $FN = \frac{AO + \frac{AO}{2}}{2} = \frac{3}{4}AO$, ahonnan pedig $EM + FN = AO$. (1 pont)

b) Legyenek $BB' \perp AO$, $CC' \perp AO$ és $FF' \perp AO$, ahol $B', C', F' \in AO$, valamint $EE' \perp FN$, ahol $E' \in FN$ és $EE' \cap AO = \{I\}$.

Ekkor $OBB'_\Delta \equiv OCC'_\Delta$, mivel mindkettő derékszögű, $BO \equiv OC$ (átfogók), illetve $\widehat{BOB'} \equiv \widehat{COC'}$ (csúcsszögek). Innen pedig $BB' = CC'$. (1 pont)

Megjegyzés. A BB' és CC' kongruenciája bizonyítható egyenlő területek felírásával is. Az AOB_Δ területe egyenlő az AOC_Δ területével, mert AO oldalfelező. Viszont $BB' \perp AO$, $CC' \perp AO$, így felírható, hogy

$$T_{AOB_\Delta} = \frac{AO \cdot BB'}{2} = T_{AOC_\Delta} = \frac{AO \cdot CC'}{2} \implies BB' = CC'.$$

Legyen $SS' \perp AO$, ahol $S' \in AO$. Az SS' az ACC'_Δ középvonala, ahonnan

$$SS' = \frac{CC'}{2} = \frac{BB'}{2}.$$

De FF' középvonal az ASS'_Δ -ben, így

$$FF' = \frac{SS'}{2} = \frac{CC'}{4} = \frac{BB'}{4}. \quad (1)$$

(1 pont)

Legyen $KK' \perp AO$, ahol $K' \in AO$. A KK' az ABB_Δ középvonala, ahonnan $KK' = \frac{BB'}{2}$, de EI a $BB'K'K$ trapéz középvonala, ahonnan

$$EI = \frac{BB' + KK'}{2} = \frac{BB' + \frac{BB'}{2}}{2} = \frac{3}{4}BB'. \quad (2)$$

Így az (1) és (2) összefüggések alapján $EE' = EI + FF' = BB'$.

(1 pont)

Tehát

$$T_{EMNF} = \frac{(NF + ME) \cdot EE'}{2} = \frac{AO \cdot BB'}{2} = T_{AOB} = \frac{T_{ABC}}{2},$$

azaz

$$\frac{T_{EMNF}}{T_{ABC}} = \frac{1}{2}.$$

(1 pont)

■