

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

XII. osztály

1. feladat. Határozd meg az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható függvényt, ha

$$f(1) = e \quad \text{és} \quad f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x \quad \text{bármely } x > 0 \text{ esetén!}$$

2. feladat. a) Adott a $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ ax + b & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$ halmaz, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Határozd meg azokat az a és b számokat, amelyekre a $(G_1, \cdot)$ Abel-féle csoport!

b) Határozd meg azokat az $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre a $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$ halmaz csoportot alkot a mátrixok szorzásával!

3. feladat. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^{1517}}{x^{2024} + 1}$ függvény primitívjeit!

4. feladat. Igazold, hogy a 2024-nek van olyan többszöröse, amelyben a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek mindegyike szerepel!