

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

XI. osztály

1. feladat. Az $(a_n)_{n \geq 1}$, illetve $(b_n)_{n \geq 0}$ sorozatot az

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ és a } b_n = a_{4n+1}^2 + a_{4n+2}^2 + a_{4n+3}^2 + a_{4n+4}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

összefüggésekkel értelmezzük, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{b_n} = \frac{1}{16}$.

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(2^{\frac{1}{b_n}} + \ln \left(1 + \frac{1}{b_n} \right) - 1 \right)$ határértéket!

2. feladat. Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ mátrix esetén $\det(A^2 - 2I_2) = 0$. Bizonyítsd be, hogy $A^2 = 2I_2$ és $\det A = -2$.

3. feladat. Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat általános tagja $a_n = \sum_{k=1}^n k \cdot k!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy a sorozat tagjai közt egyetlen négyzetszám van!

b) Határozd meg az a_{2024} utolsó 505 számjegyének összegét!

4. feladat. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = 1 \text{ és } a_{n+1}(n + a_n) = na_n, \forall n \geq 1.$$

a) Igazold, hogy a sorozat konvergens!

b) Számítsd ki az $\left(\frac{1}{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat határértékét!

c) Igazold, hogy $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1}^2} < \frac{n(5n+3)}{2}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!