



VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

megyei szakasz, 2024. február 3.

XI. osztály

1. feladat (10 pont). Az $(a_n)_{n \geq 1}$, illetve $(b_n)_{n \geq 0}$ sorozatot az

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ és a } b_n = a_{4n+1}^2 + a_{4n+2}^2 + a_{4n+3}^2 + a_{4n+4}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

összefüggésekkel értelmezzük, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{b_n} = \frac{1}{16}$.

b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(2^{\frac{1}{b_n}} + \ln \left(1 + \frac{1}{b_n} \right) - 1 \right)$ határértéket!

Cziprok András, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) $a_{4n+1} = \sum_{k=1}^{4n+1} \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor$

Mivel bármely $k \in \mathbb{N}$ szám $4p$, $4p+1$, $4p+2$ vagy $4p+3$ alakú és $\left\lfloor \frac{4p}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4p+1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4p+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4p+3}{4} \right\rfloor = p$, felírhatjuk, hogy

$$a_{4n+1} = 4 \sum_{p=0}^{n-1} p + \left\lfloor \frac{4n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4n+1}{4} \right\rfloor = 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n + n = 2n^2 - 2n + 2n = 2n^2$$

(1 pont)

Hasonlóan:

$$\begin{aligned} a_{4n+2} &= \sum_{k=1}^{4n+2} \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{4n+1} \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4n+2}{4} \right\rfloor = \\ &= a_{4n+1} + n = 2n^2 + n \end{aligned}$$

(1 pont)

$$\begin{aligned} a_{4n+3} &= \sum_{k=1}^{4n+3} \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{4n+2} \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4n+3}{4} \right\rfloor = \\ &= a_{4n+2} + n = 2n^2 + n + n = 2n^2 + 2n \end{aligned}$$

(1 pont)

és

$$\begin{aligned} a_{4n+4} &= \sum_{k=1}^{4n+4} \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{4n+3} \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4n+4}{4} \right\rfloor = \\ &= a_{4n+3} + n + 1 = 2n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

(1 pont)

Kiszámíthatjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} b_n &= (2n^2)^2 + (2n^2 + n)^2 + (2n^2 + 2n)^2 + (2n^2 + 3n + 1)^2 = \\ &= 16n^4 + 24n^3 + 18n^2 + 6n + 1 \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{és } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{16n^4 + 24n^3 + 18n^2 + 6n + 1} = \frac{1}{16} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{b) Mivel } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16n^4 + 24n^3 + 18n^2 + 6n + 1} = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

belátjuk, hogy a keresett határérték $\infty \cdot 0$ alakú.

A keresett határérték felírható mint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{\frac{1}{b_n}} - 1}{\frac{1}{b_n}} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{b_n})}{\frac{1}{b_n}} \right] \cdot \frac{n^4}{b_n} = \quad (1 \text{ pont})$$

$$= (\ln 2 + 1) \cdot \frac{1}{16} = \frac{\ln 2 + 1}{16} \quad (1 \text{ pont})$$

■

2. feladat (10 pont). Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ mátrix esetén $\det(A^2 - 2I_2) = 0$. Bizonyítsd be, hogy $A^2 = 2I_2$ és $\det A = -2$.

Matlap 1/2024, L:3682

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

$$\text{Legyen } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}). \text{ Ekkor } A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{és } A^2 - 2I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc - 2 & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc - 2 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Mivel } \det(A^2 - 2I_2) = 0, \text{ következik, hogy: } (a^2 + bc - 2)(d^2 + bc - 2) - bc(a+d)^2 = 0$$

$$a^2d^2 + a^2bc - 2a^2 + d^2bc + b^2c^2 - 2bc - 2d^2 - 2bc + 4 - a^2bc - 2abcd - bcd^2 = 0$$

Csoportosítva a tagokat:

$$(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) - 2(a^2 + d^2) - 4bc + 4 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$(ad - bc)^2 - 2(a^2 + d^2 + 2ad) + 4ad - 4bc + 4 = 0$$

$$(ad - bc)^2 + 4(ad - bc) + 4 - 2(a + d)^2 = 0$$

$$[(ad - bc) + 2]^2 - 2(a + d)^2 = 0 \quad (3 \text{ pont})$$

$$\text{Mivel } ad - bc + 2 \in \mathbb{Q} \text{ és } a + d \in \mathbb{Q}, \text{ következik, hogy } ad - bc + 2 = 0 \text{ és } a + d = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Tehát } \det A = ad - bc = -2. \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Kiszámítjuk az } A^2 \text{ elemeit: } a^2 + bc = a^2 + ad + 2 = a(a + d) + 2 = 2 \text{ és } bc + d^2 = d^2 + ad + 2 =$$

$$= d(a + d) + 2 = 2. \text{ Innen } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2. \quad (1 \text{ pont})$$

■

Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

Felírhatjuk, hogy $A^2 - 2I_2 = (A - \sqrt{2}I_2)(A + \sqrt{2}I_2)$, és mivel $\det(A^2 - 2I_2) = 0$, következik, hogy vagy $\det(A - \sqrt{2}I_2) = 0$, vagy $\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$. (2 pont)

Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

$$\det(A - \sqrt{2}I_2) = (a - \sqrt{2})(d - \sqrt{2}) - bc = (ad - bc + 2) - \sqrt{2}(a + d) \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $ad - bc + 2 \in \mathbb{Q}$ és $a + d \in \mathbb{Q}$, következik, hogy $ad - bc + 2 = 0$ és $a + d = 0$ (2 pont)

Hasonlóan, ha $\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$, következik, hogy $(ad - bc + 2) + \sqrt{2}(a + d) = 0$ és $ad - bc + 2 = 0$ és $a + d = 0$. (1 pont)

Az 1. megoldáshoz hasonlóan következik, hogy $\det A = -2$ (1 pont)

és $A^2 = 2I_2$ (1 pont)

Megjegyzés. Miután kimutattuk, hogy $\det A = -2$ és $a + d = \text{Tr}(A) = 0$, alkalmazhatjuk Hamilton–Cayley tételét: $A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 = 2I_2$. ■

3. feladat (10 pont). Az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat általános tagja $a_n = \sum_{k=1}^n k \cdot k!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy a sorozat tagjai közt egyetlen négyzetszám van!

b) Határozd meg az a_{2024} utolsó 505 számjegyének összegét!

(Szilágyi Judit, Kolozsvár)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) $a_1 = 1 \cdot 1! = 1$, ami négyzetszám.

$a_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$, ami nem négyzetszám. (1 pont)

Bármely $k \geq 3$ -ra $k \cdot k! = k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ osztható 3-mal, következik, hogy bármely $n \geq 3$ -ra $a_n = 5 + 3N = 3M + 2$ alakú. (2 pont)

Viszont a négyzetszámok 3-mal való osztási maradéka csak 0 vagy 1 lehet, így a_n nem négyzetszám. (1 pont)

Tehát a sorozat tagjai közt csak egy négyzetszám található.

$$b) a_n = \sum_{k=1}^n k \cdot k! = \sum_{k=1}^n (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1$$

Tehát $a_{2024} = (2025)! - 1$. (1 pont)

Megszámoljuk, hogy hány nullában végződik a $2025!$ szám. Mivel $2025 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2025$, ez attól függ, hogy a prímtényezőkre bontott alakjában hány $2 \cdot 5$ -ös párt tudunk létrehozni. Mivel 2-es tényezőből több van, a párok száma az 5-ös tényezők számával fog megegyezni:

$$\left\lfloor \frac{2025}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{5^4} \right\rfloor \quad (5^5 > 2025),$$

(1 pont)

ami $405 + 81 + 16 + 3 = 505$. (2 pont)

Tehát az a_{2024} szám egyenlő egy 505 nullában végződő szám és 1 különbségével, ami 505 darab 9-esben fog végződni. Így az a_{2024} utolsó 505 számjegyének összege $505 \cdot 9 = 4545$. (1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = 1 \text{ és } a_{n+1}(n + a_n) = na_n, \forall n \geq 1.$$

- a) Igazold, hogy a sorozat konvergens!
- b) Számítsd ki az $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat határértékét!
- c) Igazold, hogy $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1}^2} < \frac{n(5n+3)}{2}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) $a_{n+1} = \frac{na_n}{n+a_n}$ (1), a rekurencia reláció alapján.

Indukcióval igazolható, hogy $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Valóban $a_1 = 1 > 0$ és $\forall k \in \mathbb{N}^*$ esetén, ha $a_k > 0 \Rightarrow \Rightarrow a_{k+1} = \frac{ka_k}{k+a_k} > 0$. Tehát $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, vagyis a sorozat alulról korlátos. (0,75 pont)

Az (1)-es összefüggés alapján $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+a_n} < 1$, mivel $n < n+a_n$. Mivel $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pozitív tagú sorozat és $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, a sorozat szigorúan csökkenő. (0,75 pont)

Mivel a sorozat szigorúan csökkenő és alulról korlátos, következik, hogy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ konvergens. (0,5 pont)

- b) Az (1)-es összefüggést átalakítva az $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{n+a_n}{na_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{n}$ ekvivalens alakra hozhatjuk. (1 pont)

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{1} \\ \frac{1}{a_3} &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

és az összefüggéseket összeadva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$. (2 pont)

c) $\frac{1}{a_{k+1}^2} = \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)^2$ (1 pont)

Felírjuk a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}}{k} \leq \sqrt{\frac{2^2 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2}}{k}},$$

ahonnan $\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right)^2 \leq k \left(2^2 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2}\right)$.

$$\text{Tehát } \frac{1}{a_{k+1}^2} \leq k \left(2^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \right). \quad (1 \text{ pont})$$

Ugyanakkor

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k}. \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Így } \frac{1}{a_{k+1}^2} \leq k \left(2^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \right) < k \left(4 + 1 - \frac{1}{k} \right) = 5k - 1 \quad (0,5 \text{ pont})$$

$$\text{és } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1}^2} < \sum_{k=1}^n (5k - 1) = 5 \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{5n^2 + 3n}{2} = \frac{n(5n+3)}{2}. \quad (0,5 \text{ pont})$$

■