

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

megyei szakasz, 2024. február 3.

IX. osztály

1. feladat (10 pont). a) Határozd meg, hogy hány $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ számpár teljesíti az

$$a^2 + b^2 + 2 \leq 2a + 6b$$

egyenlőtlenséget!

b) Ha $x \in (2, 3)$ és $y \in (3, 4)$ valós számok, akkor igazold, hogy $\frac{(2x-5)(y-3)}{x-2} < 1$.

Matlap 1/2024 A:4863

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) $a^2 + b^2 + 2 \leq 2a + 6b \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 \leq 8$.

(1 pont)

$$\Rightarrow ((a-1)^2, (b-3)^2) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,4), (4,0), (1,4), (4,1), (4,4)\}$$

(1 pont)

$$\Rightarrow ((a-1), (b-3)) \in \{(0,0), (0,\pm 1), (\pm 1,0), (\pm 1,\pm 1), (0,\pm 2), (\pm 2,0), (\pm 1,\pm 2), (\pm 2,\pm 1), (\pm 2,\pm 2)\}$$

(1 pont)

Tehát összesen $1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 25$ ilyen számpár van.

(1 pont)

b) Mivel $x > 2$, következik, hogy $x-2 > 0$, tehát $\frac{(2x-5)(y-3)}{x-2} < 1 \Leftrightarrow (2x-5)(y-3) < x-2$

(1 pont)

$$\Leftrightarrow 2xy - 5y - 6x + 15 < x - 2 \Leftrightarrow 2xy - 5y - 7x + 17 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow xy - \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}x + \frac{17}{2} < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right) \left(y - \frac{7}{2}\right) < \frac{1}{4}$$

(2 pont)

$$\text{Mivel } x \in (2, 3) \text{ és } y \in (3, 4), \text{ következik, hogy } x - \frac{5}{2} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ és } y - \frac{7}{2} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{tehát } \left(x - \frac{5}{2}\right) \left(y - \frac{7}{2}\right) < \frac{1}{4}.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, következik, hogy az eredeti állítás igaz. (2 pont)

Második megoldás

$$\text{Mivel } x > 2, \text{ következik, hogy } x-2 > 0, \text{ tehát } \frac{(2x-5)(y-3)}{x-2} < 1 \Leftrightarrow (2x-5)(y-3) < x-2$$

(1 pont)

$$\Leftrightarrow (2x - 5)(2y - 6) < 2x - 4 \Leftrightarrow (2x - 5)(2y - 6) < 2x - 5 + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x - 5)(2y - 7) < 1 \quad (2 \text{ pont})$$

Mivel $x \in (2, 3)$ és $y \in (3, 4)$, következik, hogy $2x - 5 \in (-1, 1)$ és $2y - 7 \in (-1, 1)$, tehát $\Leftrightarrow (2x - 5)(2y - 7) < 1$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, következik, hogy az eredeti állítás igaz. (2 pont)

Harmadik megoldás

Mivel $y \in (3, 4)$, következik, hogy $y - 3 \in (0, 1)$, így elégséges bizonyítani, hogy $\frac{2x - 5}{x - 2} < 1$. (2 pont)

Mivel $x > 2$, következik, hogy $x - 2 > 0$, tehát $\frac{2x - 5}{x - 2} < 1 \Leftrightarrow 2x - 5 < x - 2 \Leftrightarrow x < 3$, ami igaz. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, következik, hogy az eredeti állítás igaz. (3 pont)



2. feladat (10 pont). Bálint felírt a táblára 3 egymásután következő nullától különböző természetes számot. Dani észrevette, hogy a három szám közül az egyik prímszám, egy másik négyzetszám, a harmadik pedig köbszám (nem feltétlenül ebben sorrendben). Melyik három szám szerepelhetett a táblán? Határozd meg az összes lehetőséget!

Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Legyen a három szám p, k^2, n^3 , ahol $p, k, n \in \mathbb{N}^*$, p prím.

Ha a négyzetszám a prímszám rákövetkezője, akkor $p + 1 = k^2$ és $p = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$ prímszám, tehát $k = 2$. Így a prímszám 3, a négyzetszám 4. Ez a sorozat nem felel meg, mert sem 2 sem 5 nem köbszám. (2 pont)

Ha a köbszám a prímszám rákövetkezője, akkor $p + 1 = n^3$ és $p = n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ prímszám, tehát $n = 2$. Így a prímszám 7, a köbszám 8. Ez abban az esetben felel meg, ha a négyzetszám 9. (2 pont)

Ha a prímszám egyiknek sem a megelőzője, azaz a legnagyobb, akkor két sorrend lehetséges: k^2, n^3, p vagy n^3, k^2, p .

Az első esetben $p = n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$, ami csak akkor lehet prím, ha $n^2 - n + 1 = 1$, azaz $n = 1$ (mert $n > 0$). Ekkor $p = 2$, $n = 1$ és $k = 0$ kellene legyen, de $k \in \mathbb{N}^*$, tehát ez nem lehetséges. (2 pont)

A második esetben $k^2 = n^3 + 1 \Leftrightarrow (k-1)(k+1) = n^3$. Ekkor ha $k-1$ és $k+1$ legnagyobb közös osztója d , akkor $d \mid (k+1) - (k-1) = 2$, tehát $d = 1$ vagy $d = 2$.

Ha $d = 1$, akkor $k-1$ és $k+1$ is köbszám. Legyen $k+1 = a^3$ és $k-1 = b^3$, tehát $a^3 - b^3 = 2$. Mivel $a \geq b+1$, ezért $a^3 - b^3 \geq b^3 + 3b^2 + 3b + 1 - b^3 = 3b^2 + 3b + 1 \geq 7$, azaz nem lehet 2.

Ha $d = 2$, akkor n^3 páros és ekkor $p = n^3 + 2$ is páros, ami nem lehetséges, mert ekkor $p = 2$ és $n = 0 \notin \mathbb{N}^*$ **(2 pont)**

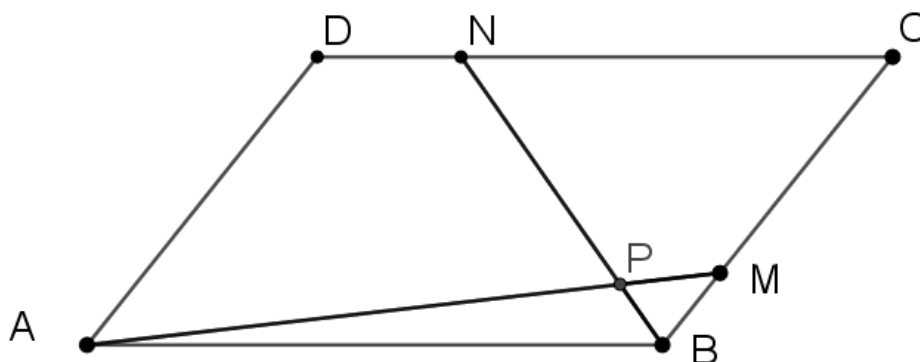
Tehát az egyetlen ilyen sorozat a 7, 8, 9. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Jelölje M az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának B ponthoz közelebbi harmadolópontját valamint N a DC oldal tetszőleges pontját. Az AM és BN egyenesek metszéspontja P . Igazold, hogy $\frac{PM}{AM} + \frac{3BP}{BN} = 1$. ***

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)



Legyen $\frac{DN}{DC} = a$, $\frac{PM}{AM} = x$ és $\frac{BP}{BN} = y$. Igazolni kell, hogy $x + 3y = 1$.

Ekkor $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

(1 pont)

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + (1-a)\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - (1-a)\overrightarrow{AB}$$

(1 pont)

$$\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + \frac{x}{3}\overrightarrow{BC}$$

(2 pont)

$$\overrightarrow{BP} = y\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BC} - y(1-a)\overrightarrow{AB}$$

(2 pont)

$$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

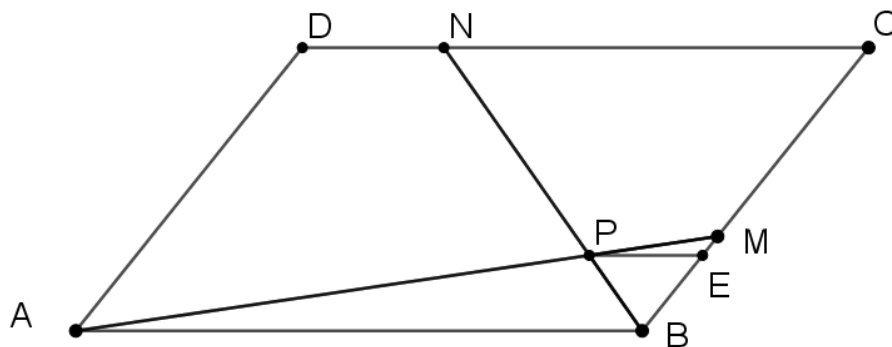
(1 pont)

$$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = (x - y + ay)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{x}{3} + y\right)\overrightarrow{BC}$$

Tehát $x - y + ay = 0$ és $\frac{x}{3} + y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x + 3y = 1$

(2 pont)

Második megoldás



A P ponton keresztül párhuzamost húzunk az AB -vel, ami a BC oldalt az E pontban metszi.

Az ABM háromszögben Thalész tételéből

$$\frac{PM}{AM} = \frac{ME}{BM} = \frac{BM - BE}{BM} = \frac{\frac{1}{3}BC - BE}{\frac{1}{3}BC} = \frac{BC - 3BE}{BC} \quad (4 \text{ pont})$$

A BNC háromszögben Thalész tételéből

$$\frac{BP}{BN} = \frac{BE}{BC} \quad (3 \text{ pont})$$

$$\text{Tehát } \frac{PM}{AM} + \frac{3BP}{BN} = \frac{BC - 3BE}{BC} + \frac{3BE}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1 \quad (2 \text{ pont})$$

■

4. feladat (10 pont). Egy 4×4 -es táblázat minden mezőjében kezdetben a 0 szám áll. Egy lépésben a táblázat két oldalszomszédos négyzetében lévő számokat 1-gyel növeljük. Megkaphatjuk-e ilyen lépésekkel az alábbi táblázatokat?

a)

1	2	4	5
7	8	10	12
11	13	15	17
18	19	20	21

b)

1	2	4	5
7	8	10	12
11	13	14	17
18	19	20	21

c)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a) Minden lépésben a táblázatban szereplő számok összege pontosan 2-vel nő. Kezdetben ez az összeg nulla, így minden lépés után a táblázatban szereplő számok összege páros szám lesz. Mivel az első táblázatban szereplő számok összege 183, ezért az a) táblázatot nem érhetjük el. (3 pont)

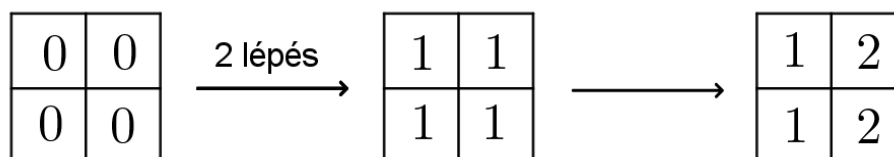
b) Az előző gondolatmenet itt nem hasznos, mivel a számok összege 182. Színezzük ki sakktábla-szerűen a táblázatot:

1	2	4	5
7	8	10	12
11	13	14	17
18	19	20	21

Tegyük fel, hogy megvalósítható a táblázat. Indulásból minden mezőben a 0 szám áll, tehát a szürke és a fehér mezőkön álló számok összege azonos. Két oldalszomszédos négyzet közül az egyik mindig fehér, a másik szürke, tehát minden lépésnél úgy a fehér mezőkön szereplő számok összege, mint a szürke mezőkön szereplő számok összege pontosan 1-gyel nő, tehát mindig egyenlő marad. Ebben a táblázatban a fehér mezőkön szereplő számok összege 92, a szürke mezők számainak összege 90, tehát nem valósítható meg a táblázat. **(3 pont)**

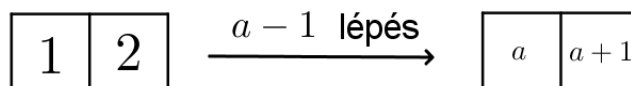
c) Ez a táblázat megvalósítható, szerkesszük meg.

Az alábbi lépésekkel a táblázatot 4 darab 2×2 -es táblázatra osztva elérhető minden saroktáblázatban a következő:



(1 pont)

Ezután minden $(1, 2)$ szomszédos pár bármilyen egymásutáni számpárrá alakítható.



(1 pont)

A fenti lépésekkel kialakítható a c) táblázat.

(1 pont)

■