

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

megyei szakasz, 2024. február 3.

VIII. osztály

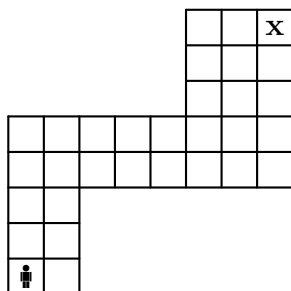
1. feladat. Adottak az $x = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023} + \sqrt{2024}}$ és $y = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2025}}$ valós számok.

- a) Igazold, hogy $x + y$ természetes szám!
b) Igazold, hogy $|x - 22| - |y - 22| < 45 - \sqrt{2024}$.

2. feladat. Az $ABCD$ trapézban $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$. A trapéz átlói merőlegesek egymásra és az O pontban metszik egymást úgy, hogy $OA = 16$ cm és $OC = 9$ cm. Az AC átlóra a C pontban húzott merőleges az AB egyenest az E pontban metszi.

- a) Számítsd ki a CE szakasz hosszát!
b) Mennyivel nagyobb az $AECD$ trapéz területe az $ABCD$ trapéz területénél?
c) Igazold, hogy $AD = \sqrt{DC \cdot AB}$.

3. feladat. Az ábrán látható négyzetrácsos táblán két játékos játszik. A bal alsó négyzetben álló bábuval felváltva lépnek akárhány négyzetet vagy jobbra vagy felfelé. Az veszít, aki a bábuval az **X**-szel jelölt jobb felső négyzetre lép. Jelöld be a táblán azokat a négyzeteket, ahova lépve a kezdő játékos biztosan nyer! Indokold a válaszod!



4. feladat. Az $ABCD A'B'C'D'$ kocka éle 12 cm.

- a) Hány különböző egyenlő oldalú háromszöget határoznak meg a kocka éleinek felezőpontjai? Indokold válaszodat!
b) Az A_1 , E , F és G pontok az AB , DA , DD' és DC élek felezőpontjai. Az A_1 felezőponton áthaladó, az (EFG) síkkal párhuzamos sík az éleket az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontokban metszi, ahol n a kocka azon éleinek a száma, amelyeket a párhuzamos sík metsz. Számítsd ki az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok által meghatározott konvex alakzat területét!