

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIII. EMMV

megyei szakasz, 2024. február 3.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy az alábbi a szám négyzetszám:

$$a = \sqrt{\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \cdots + \frac{119}{784} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{112}\right)}.$$

b) Igazold, hogy az alábbi b és c számok racionálisak:

$$b = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{\sqrt{4098600}},$$

$$c = \frac{360}{\sqrt{18}} + \frac{5}{(5 - 3\sqrt{2})^{2023}} \cdot \frac{(10 - 6\sqrt{2})^{2024}}{2^{2022}}.$$

Matlap 1/2024, A:4858

Megoldás. Hivatalból

(1 pont)

a)

$$a = \sqrt{\left(\frac{1+7}{1 \cdot 7} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{2+7}{2 \cdot 7} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3+7}{3 \cdot 7} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{112+7}{112 \cdot 7} - \frac{1}{112}\right)} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{112} - \frac{1}{112}\right)} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \sqrt{\underbrace{\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{7}}_{112\text{-szer}}} = \sqrt{\frac{112}{7}} = \sqrt{16} = 4 = 2^2,$$

tehát a négyzetszám.

(1 pont)

b)

$$b = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4}} + \cdots + \frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{\sqrt{2024} \cdot \sqrt{2025}} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2023}} + \frac{1}{\sqrt{2025}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2025}} - \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{45} - 1 = -\frac{44}{45} \in \mathbb{Q}. \quad (1 \text{ pont})$$

$$c = \frac{360}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{(5-3\sqrt{2})^{2023}} \cdot \frac{2^{2024} \cdot (5-3\sqrt{2})^{2024}}{2^{2022}} \quad (1 \text{ pont})$$

$$= \frac{360\sqrt{2}}{6} + 5 \cdot 2^2 \cdot (5-3\sqrt{2}) \quad (1 \text{ pont})$$

$$= 60\sqrt{2} + 100 - 60\sqrt{2} = 100 \in \mathbb{Q}. \quad (1 \text{ pont})$$

■

2. feladat (10 pont). Hány olyan különböző háromszög szerkeszthető, melyek oldalai mind különböző hosszúak, és az oldalak hosszai milliméterben kifejezve a 2024 szám valamelyik kétjegyű osztójával egyenlők?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

Prímtényezőkre bontva $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, innen következik, hogy a 2024 kétjegyű osztói a következők: 11, 22, 23, 44, 46, 88 és 92. (3 pont)

Felírva az összes olyan számhármast, amelyek a 2024 különböző kétjegyű osztóival alkothatók, és amelyekben a számok növekvő sorrendben szerepelnek, a következő 35 darab számhármast kapjuk:

(11, 22, 23), (11, 22, 44), (11, 22, 46), (11, 22, 88), (11, 22, 92), (11, 23, 44), (11, 23, 46),
 (11, 23, 88), (11, 23, 92), (11, 44, 46), (11, 44, 88), (11, 44, 92), (11, 46, 88), (11, 46, 92),
 (11, 88, 92), (22, 23, 44), (22, 23, 46), (22, 23, 88), (22, 23, 92), (22, 44, 46), (22, 44, 88),
 (22, 44, 92), (22, 46, 88), (22, 46, 92), (22, 88, 92), (23, 44, 46), (23, 44, 88), (23, 44, 92),
 (23, 46, 88), (23, 46, 92), (23, 88, 92), (44, 46, 88), (44, 46, 92), (44, 88, 92), (46, 88, 92).

A fenti számhármastok közül azok lesznek egy háromszög oldalainak mérőszámai, melyekre teljesül, hogy a két kisebbik szám összege nagyobb a harmadiknál, ezek a következők:

(11, 22, 23), (11, 44, 46), (11, 88, 92), (22, 23, 44), (22, 44, 46), (22, 88, 92),
 (23, 44, 46), (23, 88, 92), (44, 46, 88), (44, 88, 92), (46, 88, 92). (5 pont)

Tehát 11 különböző háromszög szerkeszthető, amely megfelel a feladat feltételeinek. (1 pont)

■

3. feladat (10 pont). Adott az $ABCD$ trapéz, ahol $AB \parallel CD$ és $AB > CD$. Az M pont a CD szakasz felezőpontja, illetve N az AB szakasz felezőpontja, valamint a nagyalapon fekvő szögek pótiszögek.

a) Ha EF a trapéz középvonala, ahol $E \in AD$, $F \in BC$, valamint $\{Q\} = DB \cap EF$, mutasd ki, hogy $MQ \parallel BC$!

b) Igazold, hogy $MN < \frac{AD + BC}{2}$!

c) Bizonyítsd be, hogy $MN = \frac{AB - DC}{2}$!

(***)

Megoldás. Hivatalból (1 pont)

a) Az EF az $ABCD$ trapéz középvonala és $EF \cap BD = \{Q\}$, innen következik, hogy QF középvonal a BCD háromszögben, tehát Q a BD szakasz felezőpontja. (1 pont)

Mivel M a CD felezőpontja és Q a BD szakasz felezőpontja következik, hogy MQ középvonal a DBC háromszögben, innen következik, hogy $QM \parallel BC$, amit bizonyítani kellett. (2 pont)

b) Tudjuk, hogy MQ középvonal a DBC háromszögben, ezért $MQ = \frac{BC}{2}$. (1 pont)

Mivel Q a BD szakasz felezőpontja és N az AB szakasz felezőpontja, innen következik, hogy QN középvonal a BAD háromszögben, tehát $QN = \frac{AD}{2}$. (1 pont)

Az MQN háromszögben a háromszög egyenlőtlenség alapján következik, hogy $MN < QM + QN$, tehát $MN < \frac{AD + BC}{2}$. (1 pont)

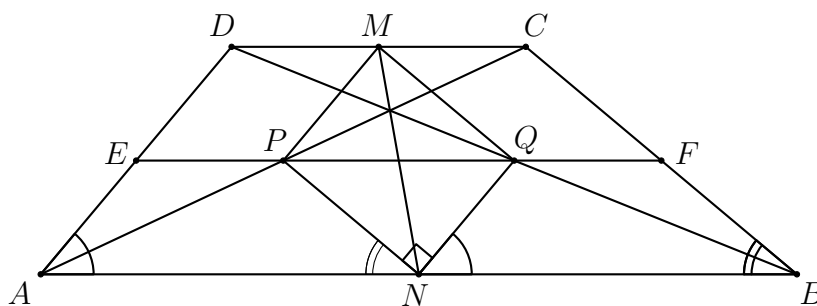
c) Legyen $\{P\} = EF \cap AC$, ekkor PN középvonal az ABC háromszögben és MQ szintén középvonal a DBC háromszögben, innen következik, hogy $PN \parallel MQ \parallel BC$ és $PN = MQ = \frac{BC}{2}$, tehát $PNQM$ paralelogramma. (1 pont)

Mivel $PN \parallel BC$ következik, hogy $\widehat{PNA} = \widehat{B}$. Hasonlóan mivel $QN \parallel AD$ következik, hogy $\widehat{QNB} = \widehat{A}$. Mivel $\widehat{BAD} + \widehat{CBA} = \widehat{PNA} + \widehat{QNB} = 90^\circ$ következik, hogy $\widehat{PNQ} = 90^\circ$, ehhez hozzávetve, hogy $PNQM$ paralelogramma következik, hogy a $PNQM$ négyszög egy téglalap.

Mivel $PNQM$ téglalap következik, hogy $MN = PQ$. A trapézban a középvonal $EF = \frac{AB + DC}{2}$ és EP meg QF középvonalak az ADC illetve a BDC háromszögekbe, így

$$MN = PQ = EF - EP - QF = \frac{AB + DC}{2} - \frac{DC}{2} - \frac{DC}{2} = \frac{AB - DC}{2}.$$

(1 pont)



4. feladat (10 pont). Határozd meg azt az $\overline{abcd}$ alakú négyjegyű természetes számot, amelyre fennáll az $\overline{abcd} = (2\overline{ab} + 4)(2\overline{cd} - 2)$ egyenlőség!

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (1 pont)

Átalakítva a feladatban szereplő egyenlőséget kapjuk, hogy $100\overline{ab} + \overline{cd} = 4\overline{ab} \cdot \overline{cd} - 4\overline{ab} + 8\overline{cd} - 8$, melyet rendezve a $104\overline{ab} - 4\overline{ab} \cdot \overline{cd} - 7\overline{cd} + 8 = 0$ egyenlőséghez jutunk, (2 pont)

amely ekvivalens a $(26 - \overline{cd}) \cdot (4\overline{ab} + 7) = 174$ egyenlőséggel. (2 pont)

A $4\overline{ab} + 7$ a 174 osztója és a 174 osztóinak halmaza $D_{174} = \{1, 2, 3, 6, 29, 58, 87, 174\}$. A $4\overline{ab} + 7$ -nek a 4-gyel való osztási maradéka 3, ezért a $4\overline{ab} + 7$ csakis 87-tel lehet egyenlő, ahonnan kapjuk, hogy $\overline{ab} = 20$. (3 pont)

A fentiek alapján $26 - \overline{cd} = 2$, ahonnan kapjuk, hogy $\overline{cd} = 24$, (1 pont)

tehát a keresett szám $\overline{abcd} = 2024$. (1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból (1 pont)

Átalakítva a feladatban szereplő egyenlőséget kapjuk, hogy $100\overline{ab} + \overline{cd} = 4\overline{ab} \cdot \overline{cd} - 4\overline{ab} + 8\overline{cd} - 8$.

(1 pont)

Bevezetve az $\overline{ab} = x$ és $\overline{cd} = y$ jelöléseket kapjuk, hogy $100x + y = 4xy - 4x + 8y - 8$. (1 pont)

Az előbbi összefüggésből kifejezve az y -t kapjuk, hogy $y = \frac{104x + 8}{4x + 7}$. (2 pont)

Mivel y értéke természetes szám kell legyen, ezért $(4x + 7) \mid (104x + 8)$, figyelembe véve, hogy $(4x + 7) \mid 26 \cdot (4x + 7)$, következik, hogy $(4x + 7) \mid [26 \cdot (4x + 7) - (104x + 8)] = 174$, ahonnan kapjuk, hogy $(4x + 7)$ osztója kell legyen a 174-nek. (2 pont)

Mivel a 174 osztóinak halmaza $D_{174} = \{1, 2, 3, 6, 29, 58, 87, 174\}$, ezért a $4x + 7$ csak a 87-tel lehet egyenlő ahhoz, hogy x természetes szám legyen. Innen kapjuk, hogy $x = 20$. (1 pont)

A fentiekből következik, hogy $y = \frac{104 \cdot 20 + 8}{87} = \frac{2088}{87} = 24$. (1 pont)

Mivel $\overline{ab} = x = 20$ és $\overline{cd} = y = 24$, következik, hogy a keresett négyjegyű szám $\overline{abcd} = 2024$.

(1 pont)

Megjegyzés. A feladat megoldható hasonló módon, ha az x -et fejezzük ki.

■