

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{st-nat}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 pont)

- 5p** 1. Igazolja, hogy $2 \cdot (1, 1 + 0, 3) - 1, 8 = 1$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$ függvény. Határozza meg az a valós számot úgy, hogy teljesüljön az $f(a) = a \cdot f(0)$ egyenlőség!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazában a $\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+x-1}$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy egyjegyű n természetes számot, az teljesítse az $n^3 > 10$ egyenlőtlenséget!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1, 4)$, $B(2, 0)$ és $C(8, 2)$ pontok. Határozza meg az A pont és a BC szakasz felezőpontja közötti távolságot!
- 5p** 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $BC = 10$ és $\sin B = \frac{2}{5}$. Igazolja, hogy $AC = 4$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(x) = \begin{pmatrix} 2+2x & x \\ -x & 2-2x \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = 16I_2$.
- 5p** c) Határozza meg azt az m nullától különböző egész számot, amelyre a $B(m) = \frac{1}{m}A(-m)$ mátrix az $A(m)$ mátrixnak az inverz mátrixa!
2. Adott az $f = X^3 - 3X^2 - 3X + a$ polinom, ahol a valós szám.
- 5p** a) Ha $a = 1$, igazolja, hogy $f(-1) = 0$.
- 5p** b) Határozza meg azt az a valós számot, amelyre teljesül a $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_1x_2x_3 = 3$ egyenlőség, ahol x_1 , x_2 és x_3 az f polinom gyökei!
- 5p** c) Ha $a = 9$, határozza meg az f polinom gyökeit!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 8}{e^x}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képén elhelyezkedő $x = 0$ abszcisszájú pontban az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $-4e^2 \leq f(x) \leq e^3$, bármely $x \in [-3, 4]$ esetén!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + \frac{2 \ln x}{x}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_2^3 \left(f(x) - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx = 15$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $\int_1^e (f(x) - 6x) dx = 1$.

5p	c) Határozza meg azt az a valós számot, amelyre $\int_1^{e^2} \left(\frac{f(x)}{x} + f'(x) \ln x \right) dx = af(e^2)$.
-----------	---
