Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

THEMA I **(30 Punkte)**

5p **1.** Zeige, dass $2-5i+i(5-3i)=5$, wobei $i^2=-1$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+m$, wobei m eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl m so, dass $f(2)=15$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $7^{2x+1}=7^x\cdot 7^2$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass für eine gewählte natürliche zweistellige Zahl, diese mindestens eine der Ziffern gleich 1 hat.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(2,5)$ und $B(4,2)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt A und der Mitte der Strecke OB.

5p **6.** Gegeben ist das Dreieck ABC, rechtwinklig in A, mit $AB=5$ und $BC=5\sqrt{5}$. Zeige, dass $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

THEMA II **(30 Punkte)**

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ und $B(x)=\begin{pmatrix}x&x-3\\3-x&x-4\end{pmatrix}$, wobei x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det A=1$.

5p **b)** Bestimme die reelle Zahl a so, dass $B(4)\cdot B(4)+I_2=aB(4)$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl x so, dass $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x*y=(x+y)(4-x-y)$.

5p **a)** Zeige, dass $0*3=3$.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $x*1=0$.

5p **c)** Bestimme die natürlichen Zahlen n so, dass die Zahl $N=(n+5)*(n-5)$ natürlich ist.

THEMA III **(30 Punkte)**

1. Gegeben ist die Funktion $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-2\ln(x+1)$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{2x^2+x-3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der Tangenten an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt mit der Abszisse $x=0$, der zum Schaubild der Funktion f gehört.

5p **c)** Zeige, dass $x^2-x\geq 2\ln\frac{x+1}{2}$, für jedes $x\in(-1,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x+1$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^3 (f(x)-3x)\,dx=12$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^1 \frac{1}{\left(f(x)-x^2\right)^2}\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Zeige, dass der Flächeninhalt der Fläche begrenzt von dem Schaubild der Funkion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)-x^2-1}{e^x}$, der Ox-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=0$ und $x=1$, gleich $3\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$ ist.